Să se determine suma pătratelor soluțiilor ecuației $\sqrt[3]{5x-2} = \frac{1}{5}(x^3+2)$.

Soluție:

Pas 1: Notăm $\begin{cases} 5x-2 = t^3 \\ x^3+2 = 5t \end{cases}$, unde t ∈ ℝ

Adunăm cele două relații $x^3 + 5x = t^3 + 5t$

Pas 2: Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 5x$

f strict crescătoare pe ℝ $\Rightarrow f$ injectivă (1)

$f(x) = f(t)$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow x = t \Rightarrow 5x - 2 = x^3$

$\Rightarrow x^3 - 5x + 2 = 0$

Pas 3: $x^3 - 5x + 2 = 0$

Căutăm soluțiile ecuației printre divizorii lui 2 (printre divizorii termenului liber). Dacă $\alpha \in D_2$ și este soluție a ecuației, atunci vom da factor comun pe $(x - \alpha)$.

Cum $x = 2$ este soluție a ecuației, atunci vom avea factor comun pe $(x-2)$.

$x^3 - 4x - x + 2 = 0 \Rightarrow x(x^2-4) - (x-2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x-2)(x+2) - (x-2) = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x^2+2x-1) = 0$

$\begin{cases} x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x^2+2x-1 = 0 \end{cases}$

$x^2 + 2x - 1 = 0$, $\delta = 4 + 4 = 8$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} \\ x = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

S = $2^2 + (-1-\sqrt{2})^2 + (-1+\sqrt{2})^2 = 10$

Varianta E)

Răileanu Dragoș - Iulian