Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculați suma modulelor elementelor de pe diagonala principală a matricei A^{59}.

Soluție: Vom utiliza Binomul lui Newton pentru a calcula A^{59} .

Pas 1 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + B$.

Pas 2 : Calculăm $B^2, B^3, \ldots$ până ajungem la un $B^k = O_3$, unde $k \geq 2,\ k \in \mathbb{N}$.

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 9 & -9 \end{pmatrix}$; $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$.

Pas 3 : $A^{59} = (I_3 + B)^{59} = C_{59}^0 \cdot I_3^{59} + C_{59}^1 \cdot I_3^{58} \cdot B + C_{59}^2 \cdot I_3^{57} \cdot B^2 = C_{59}^0 \cdot I_3 + C_{59}^1 \cdot B + C_{59}^2 \cdot B^2$.

(Din cauza faptului că $B^3 = O_3$, ne rămân doar primii trei termeni ai dezvoltării Binomului lui Newton.)

Pas 4 : $A^{59} = 1 \cdot I_3 + 59 \cdot B + \frac{58 \cdot 59}{2} \cdot B^2 = 1 \cdot I_3 + 59 \cdot B + 29 \cdot 59 \cdot B^2$

$$A^{59} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 59 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 29 \cdot 59 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 9 & -9 \end{pmatrix}$$

$$A^{59} = \begin{pmatrix} 1 & 177 & -177 \\ 177 & 15400 & -15399 \\ -177 & 15399 & -15398 \end{pmatrix}$$

Pas 5 : $S = |1| + |15400| + |-15398| = 30799$.